



Wydział Mechaniczny Energetyki i Lotnictwa
Zakład Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji



Metoda elementów skończonych (MES2)

Wykład 2B. Dokładność MES - Uwarunkowanie układu

03.2026L

MES jako metoda przybliżona

Metoda elementów skończonych (MES) jest metodą przybliżoną, którą można wykorzystać jako procedurę numeryczną do rozwiązywania problemów fizycznych, w tym:

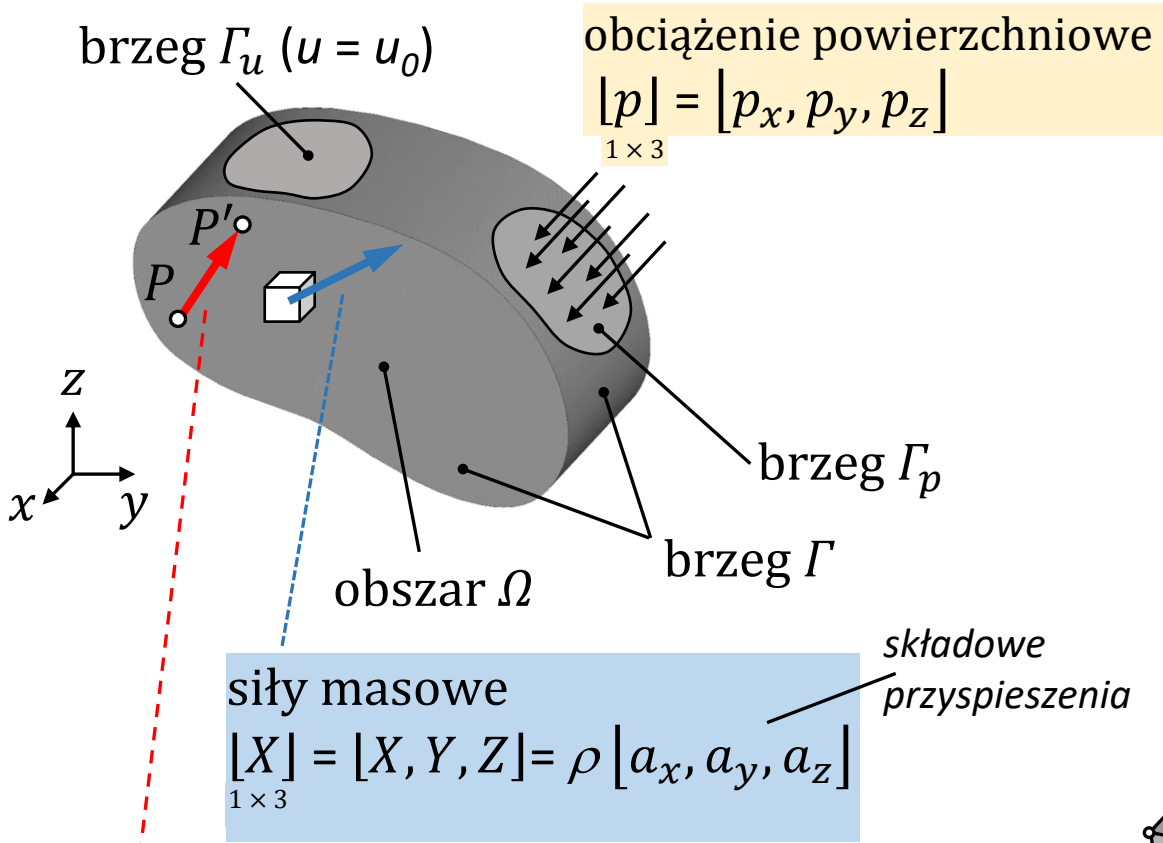
- mechaniki ciała stałego,
- wymiany ciepła,
- przepływu cieczy,
- elektromagnetyzmu,
- zagadnienia pól sprzężonych
- ...

MES został opracowany w latach 50 XX wieku w celu rozwiązywania problemów dla przemysłu cywilnego i lotniczego. Metoda stała się najpotężniejszym narzędziem analitycznym, głównie dzięki rozwojowi komputerów.

Cel wykładu MES2

Przekazanie wiedzy wymaganej do zaawansowanych analiz wybranych zagadnień mechaniki konstrukcji metodą elementów skończonych.

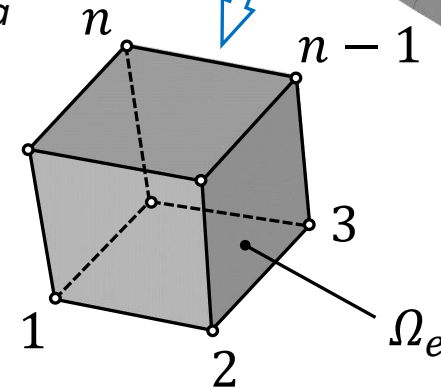
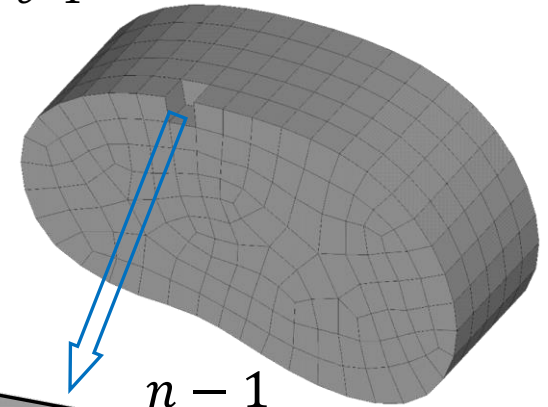
Zagadnienie brzegowe mechaniki ciała stałego



Model MES

NOE – l. elementów
 NON – l. węzłów

$$\Omega = \sum_{e=1}^{NOE} \Omega_e \text{ and } \Omega_i \cap \Omega_j = 0$$



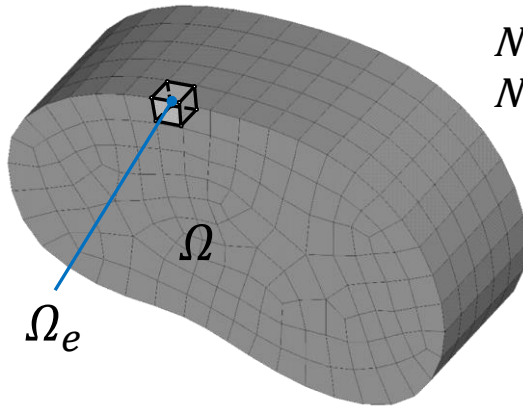
Element skończony o n - węzłach

POSZUKIWANA FUNKCJA

wektor prze-
 – mieszczania

$$\{u\}_{3 \times 1} = \begin{Bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{Bmatrix}$$

Całkowita energia potencjalna w modelu MES. Układ równań liniowych



NOE – liczba elementów
 $NDOF$ – liczba stopni swobody

Całkowita energia potencjalna modelu:

$$V = U - W = \frac{1}{2} \cdot [q] \cdot [K] \cdot \{q\} - [q] \cdot \{F\}$$

$1 \times NDOF$ $NDOF \times NDOF$ $NDOF \times 1$ $1 \times NDOF$ $NDOF \times 1$

$$\{q\} = ?$$

$NDOF \times 1$

$$V \rightarrow \min$$

$$\frac{\partial V}{\partial q_j} = 0 \rightarrow$$

$$[K] \cdot \{q\} = \{F\}$$

$NDOF \times NDOF$ $NDOF \times 1$ $NDOF \times 1$



układ równań algebraicznych liniowych

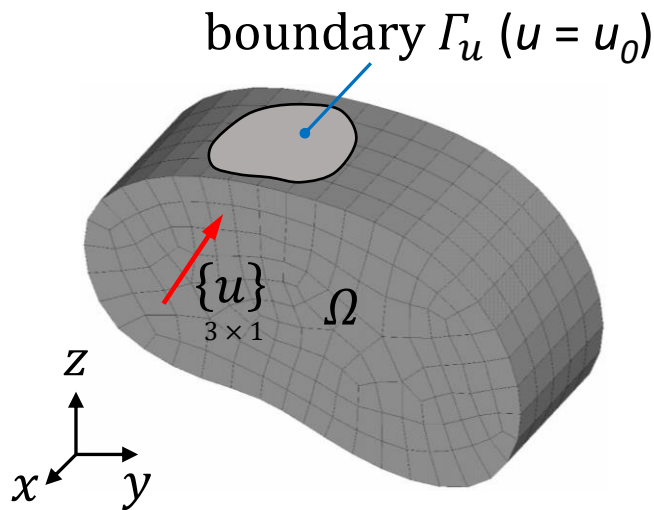
$$\det ([K]) = 0$$

$NDOF \times NDOF$



Układ równań MES z warunkami brzegowymi

Pole przemieszczeń $\{u\}$ które przedstawia rozwiązanie problemu spełnia **przemieszczeniowe warunki brzegowe na Γ_u** i minimalizuje całkowitą energię potencjalną V .



$NDOF$ – liczba stopni swobody

NOF – liczba znanych stopni swobody na Γ_u
 N – liczba nieznanymi stopni swobody:

$$N = NDOF - NOF$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 [K] & \rightarrow & [K] & ; & \{q\} & \rightarrow & \{q\} & ; & \{F\} & \rightarrow & \{F\} \\
 NDOF \times NDOF & & N \times N & & NDOF \times 1 & & N \times 1 & & NDOF \times 1 & & N \times 1
 \end{array}$$

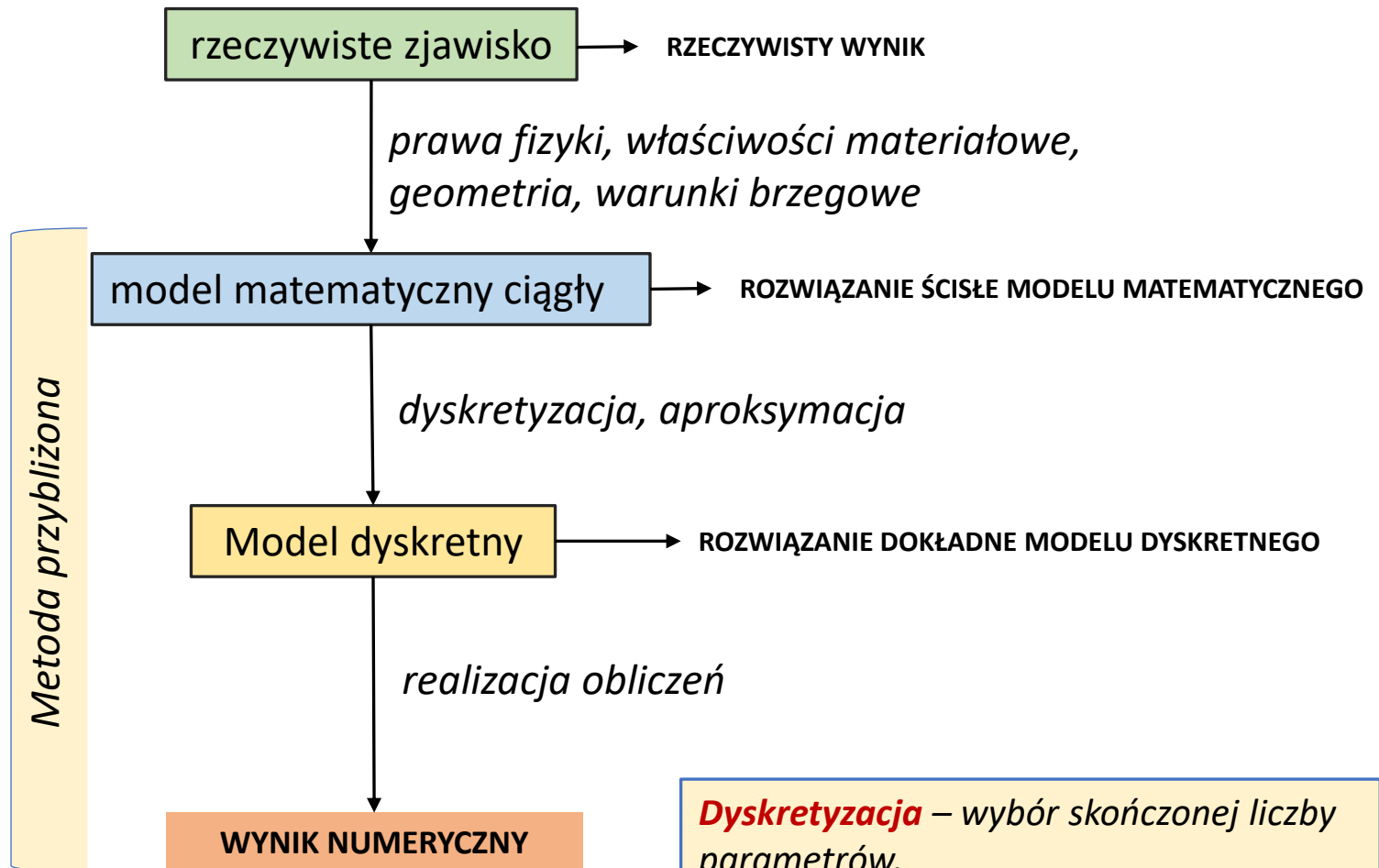
$$\boxed{
 \begin{array}{ccc}
 [K] \cdot \{q\} & = & \{F\} \\
 N \times N & & N \times 1 & & N \times 1
 \end{array}
 }$$

$$\det ([K]) \neq 0$$

$N \times N$

liniowy układ równań algebraicznych z warunkami brzegowymi

Rozwiązanie zagadnienia analizy ośrodków ciągłych metodą przybliżoną



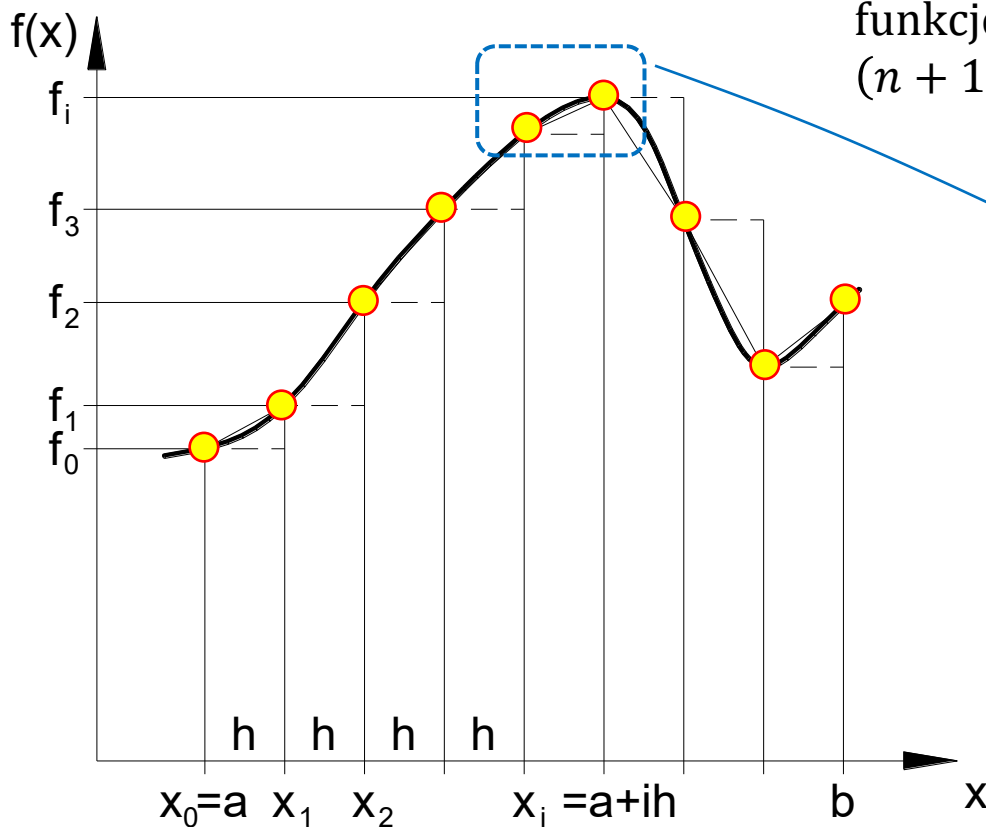
Dyskretyzacja – wybór skończonej liczby parametrów,
Aproksymacja – sposób opisu za pomocą z góry założonych prostych funkcji zależnych od poszukiwanych parametrów

Dyskretyzacja i aproksymacja na przykładzie funkcji jednej zmiennej

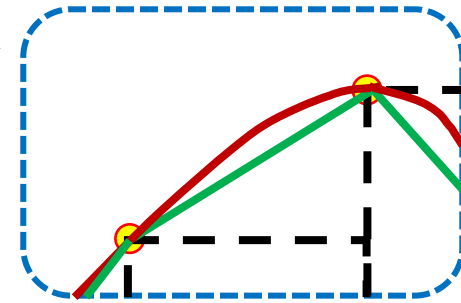
dowolna funkcja: $f(x)$ w przedziale $\langle a, b \rangle$

Dyskretyzacja:

dzielimy przedział $\langle a, b \rangle$ na n równych podprzedziałów o długości: $h = (b - a)/n$



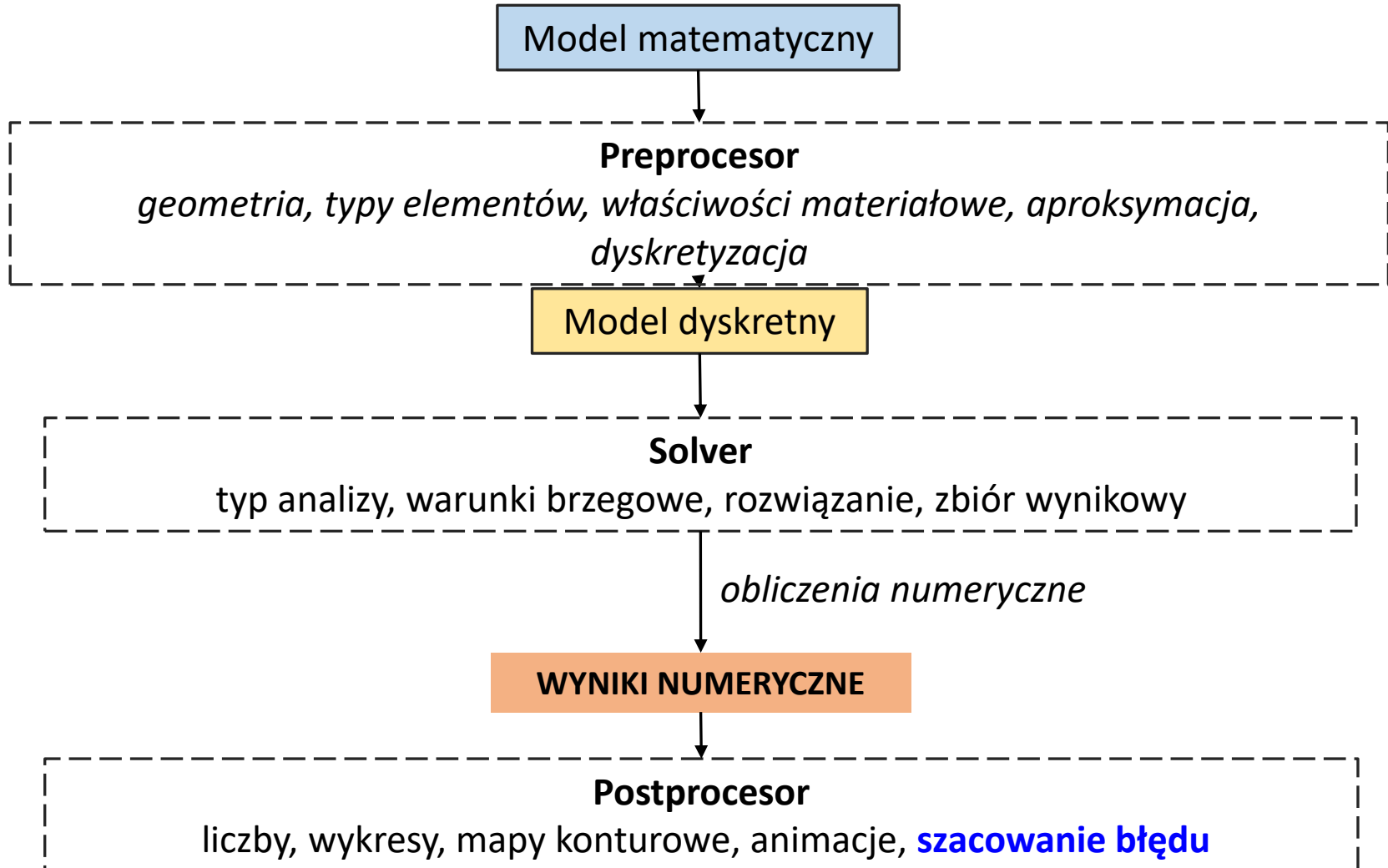
funkcję ciągłą $f(x)$ reprezentuje zbiór $(n + 1)$ wartości: $f(a + ih), i = 0, 1, 2, n$



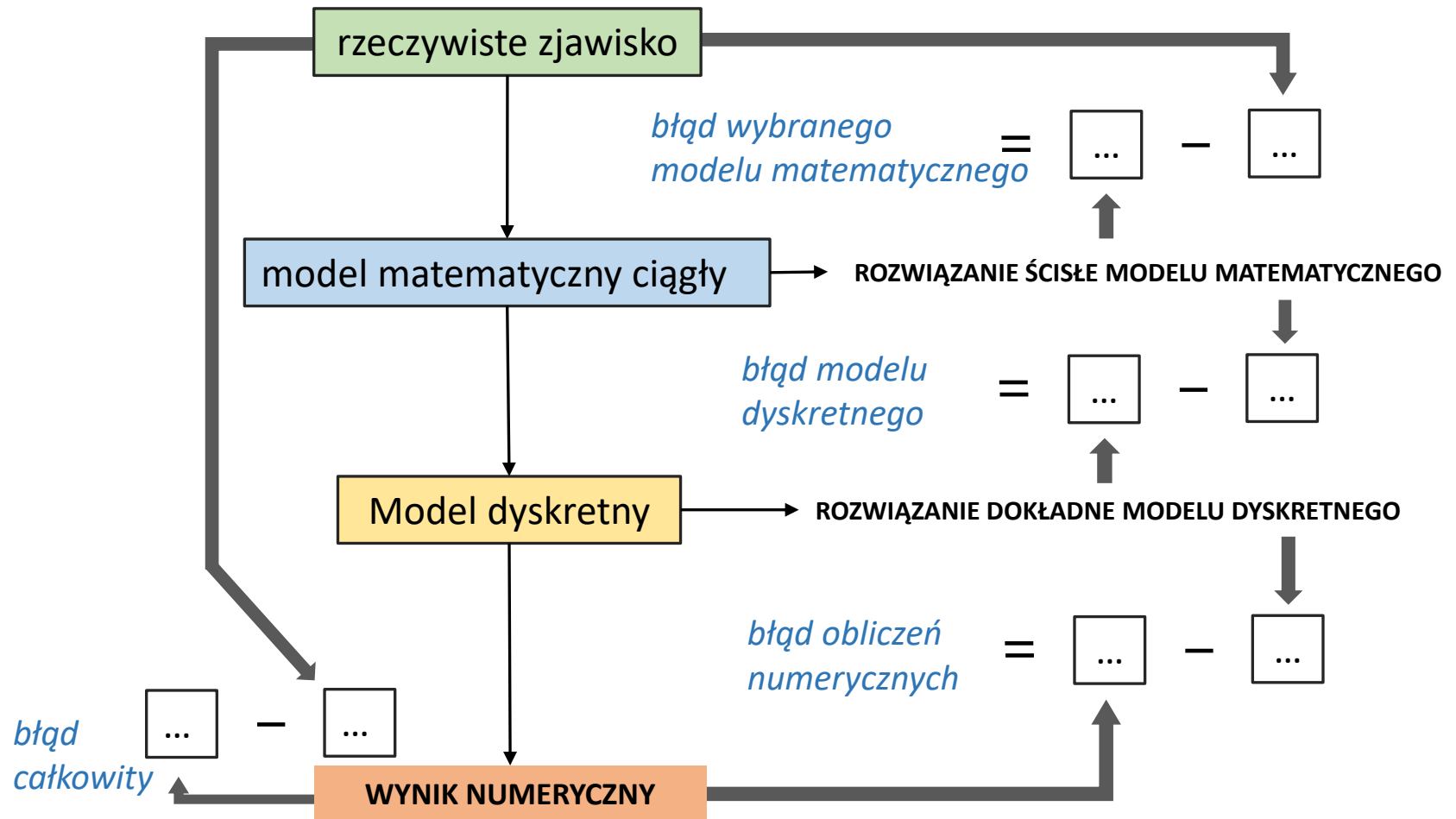
Aproksymacja może być:

- stała (schodkowa),
- liniowa (łamana),
- funkcjami sklejanymi.

Modelowanie MES – główne etapy analizy



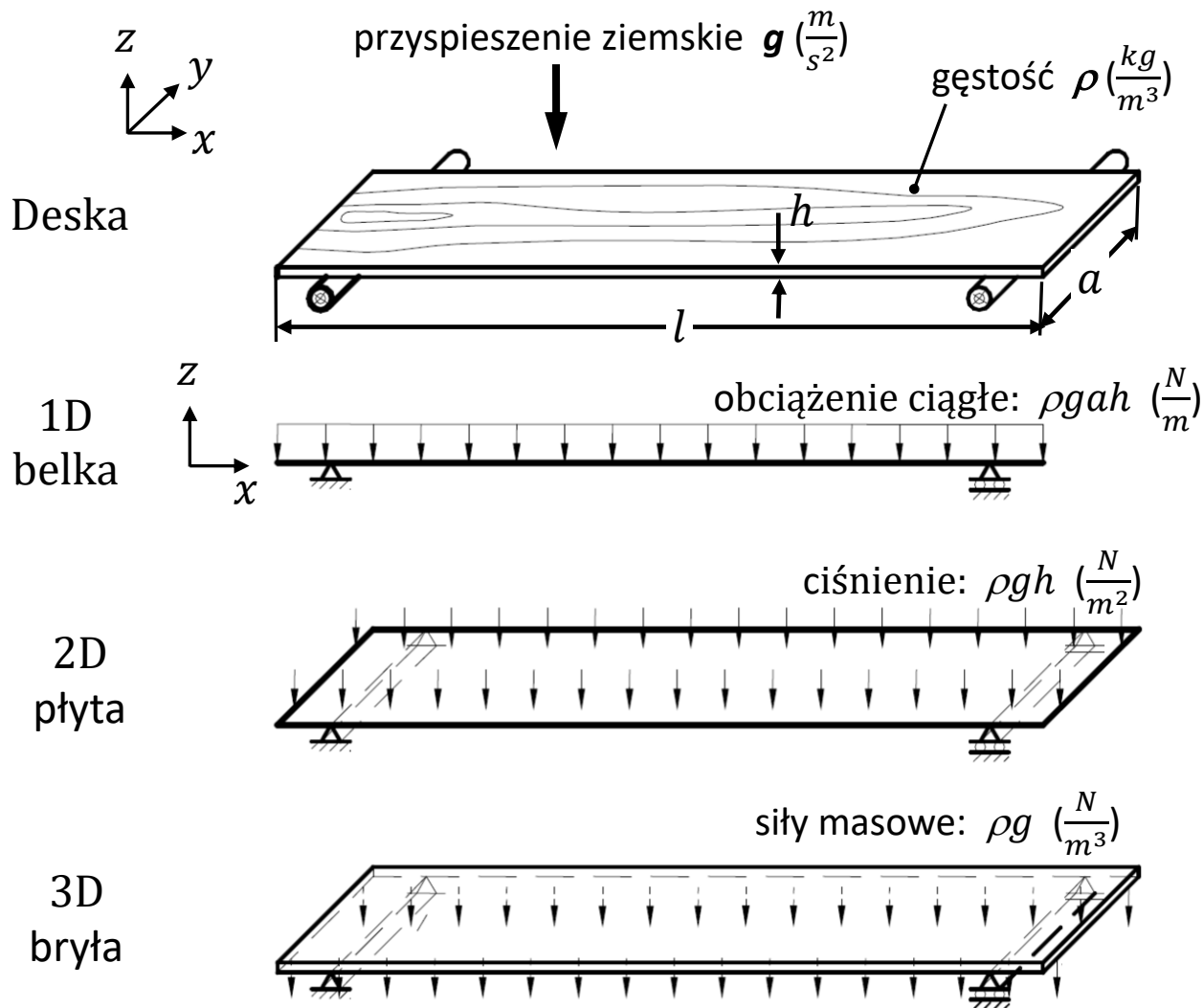
Dokładność obliczeń MES – źródła błędów



błąd całkowity = bł. wybranego modelu mat. + bł. modelu dyskretnego + bł. obliczeń numerycznych

bł. wybranego modelu mat. \approx bł. modelu dyskretnego \approx bł. obliczeń numerycznych \rightarrow min

Wybór modelu matematycznego – błąd modelu matematycznego



Założenia:

Własności materiału:

- *izotropowe,*
- *anizotropowe,*
- *lepkosprężyste,*

Duże ugięcia

Warunki brzegowe
(kontakt)

Nie ma jednego
dobrego modelu!

Właściwy model zależy od:

- *celu analizy,*
- *wymagań stawianych konstrukcji,*
- *żądanej dokładności wyników,*
- *dostępności danych materiałowych,*
- *dostępnych narzędzi obliczeniowych*

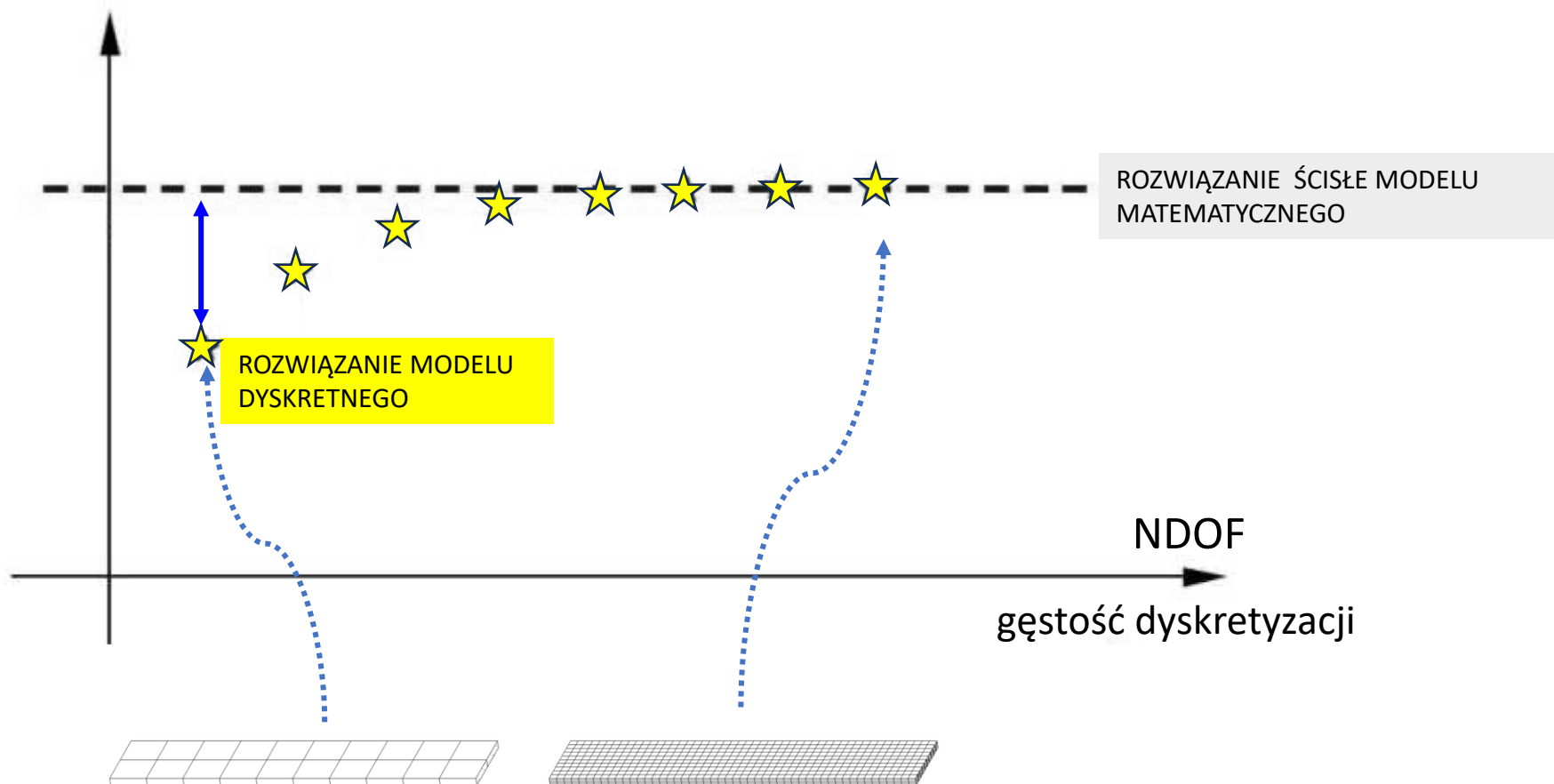
Wpływ dyskretyzacji – błąd modelu dyskretnego

Dyskretyzacja

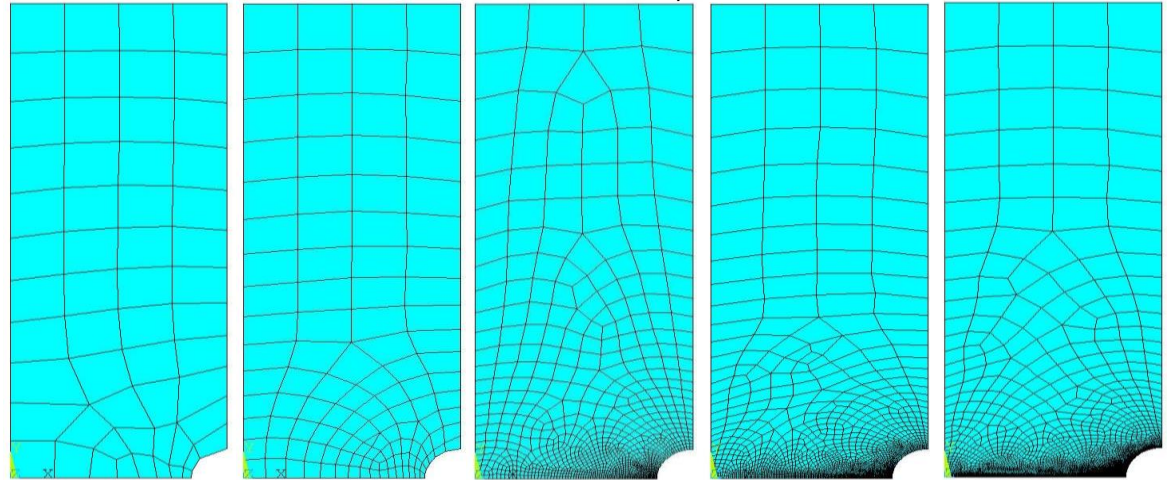
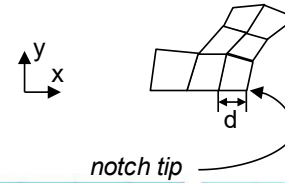
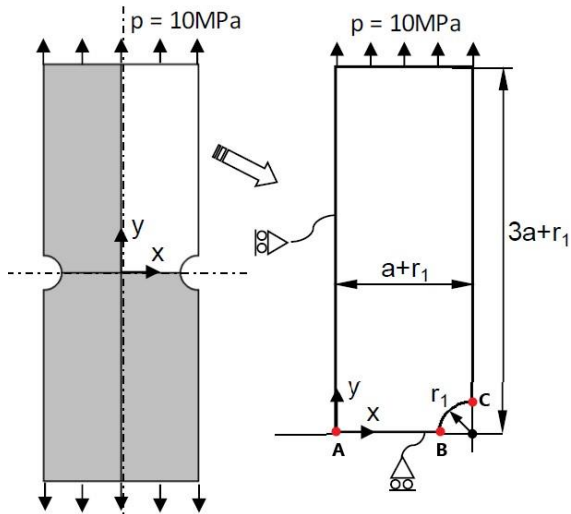
- rodzaj (mapped, free, sweep)
- gęstość

Typ elementu

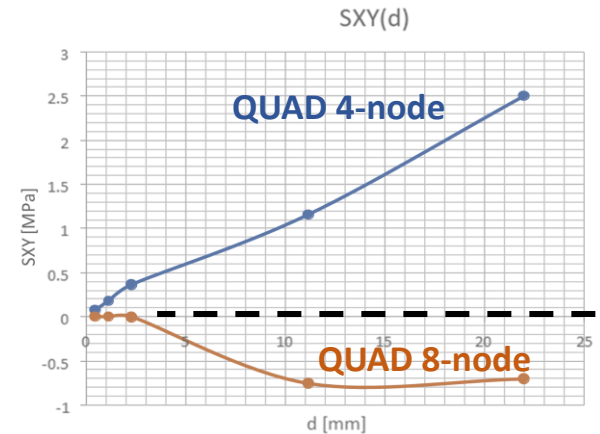
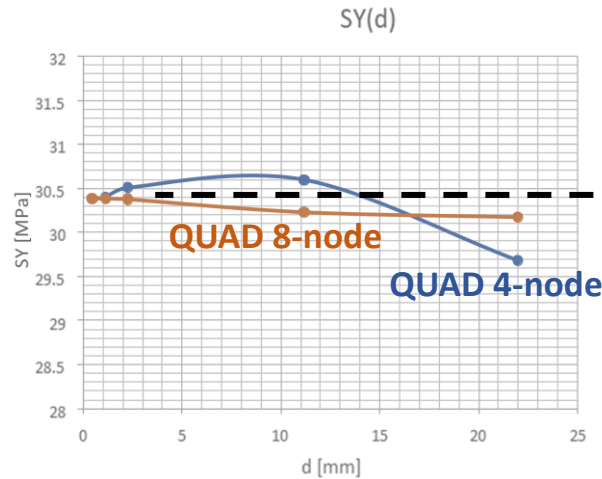
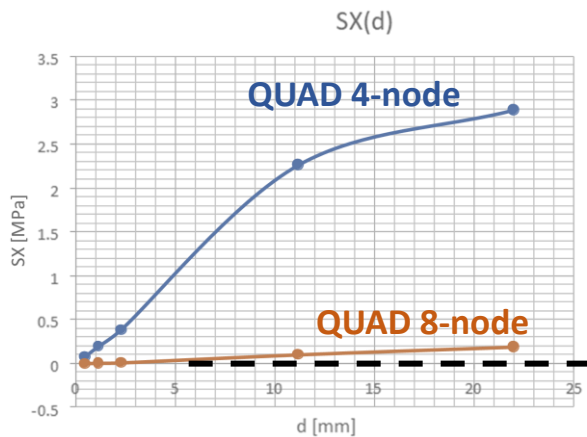
- funkcje kształtu
- schemat całkowania



Przykład Tarcza z karbem



Składowe naprężenia w wierzchołku karbu w funkcji rozmiaru elem. d (wyniki numeryczne)



--- EXACT SOLUTION OF A MATHEMATICAL MODEL

Błąd numeryczny

- typ solvera
- wskaźnik uwarunkowania macierzy

$$cond([K]) = \|[K]\| \cdot \|[K]^{-1}\|$$

Wskaźnik uwarunkowania macierzy pozwala na oszacowanie, z jaką (maksymalnie) dokładnością (do ilu miejsc po przecinku) możemy podać wynik.

- Błąd zaokrąglenia

W przybliżeniu, jeśli stopień uwarunkowania $cond([K]) = 10^k$, wówczas mogliśmy stracić maksymalnie k cyfr dokładności podczas rozwiązywania układu równań liniowych. Jednak liczba warunkowa nie określa dokładnej wartości maksymalnej niedokładności, jaka może wystąpić w algorytmie.

$$r \geq p - \log_{10} (cond([K]))$$

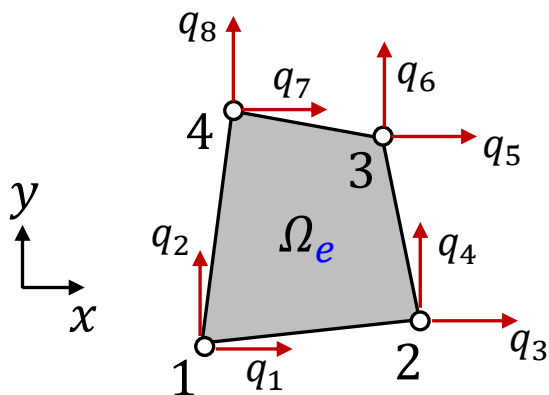
p – liczba cyfr znaczących w komputerowej reprezentacji liczb

r – liczba cyfr znaczących wyniku

W modelach MES $cond([K])$ może osiągać poziom 10^8

Przykład. Rozwiązanie $u(x, y)$ w zadaniu 2D.

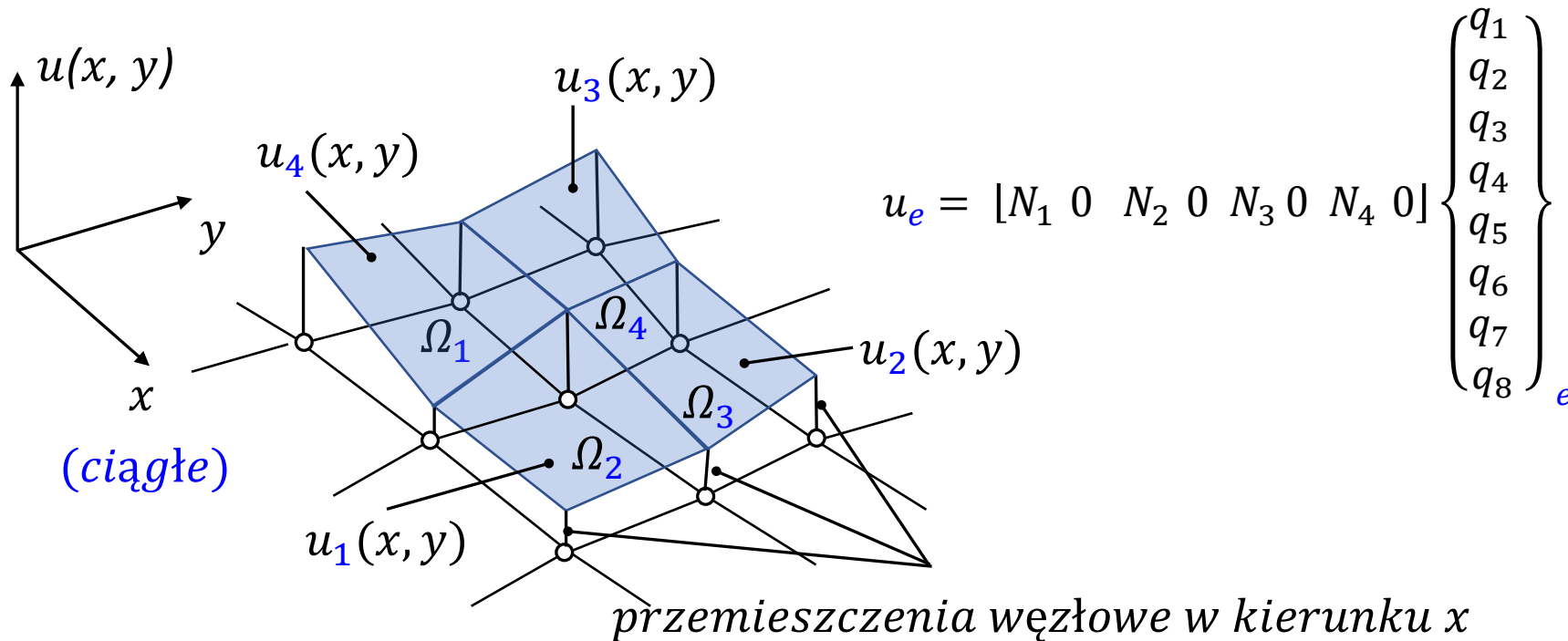
Model MES złożony z 4-węzłowych elementów czworokątnych



$$\{u\} = [N]\{q\}_e$$

$\begin{matrix} 2 \times 1 & & 2 \times 8 & 8 \times 1 \end{matrix}$

$u_e(x, y)$ – przemieszczenie w kierunku x

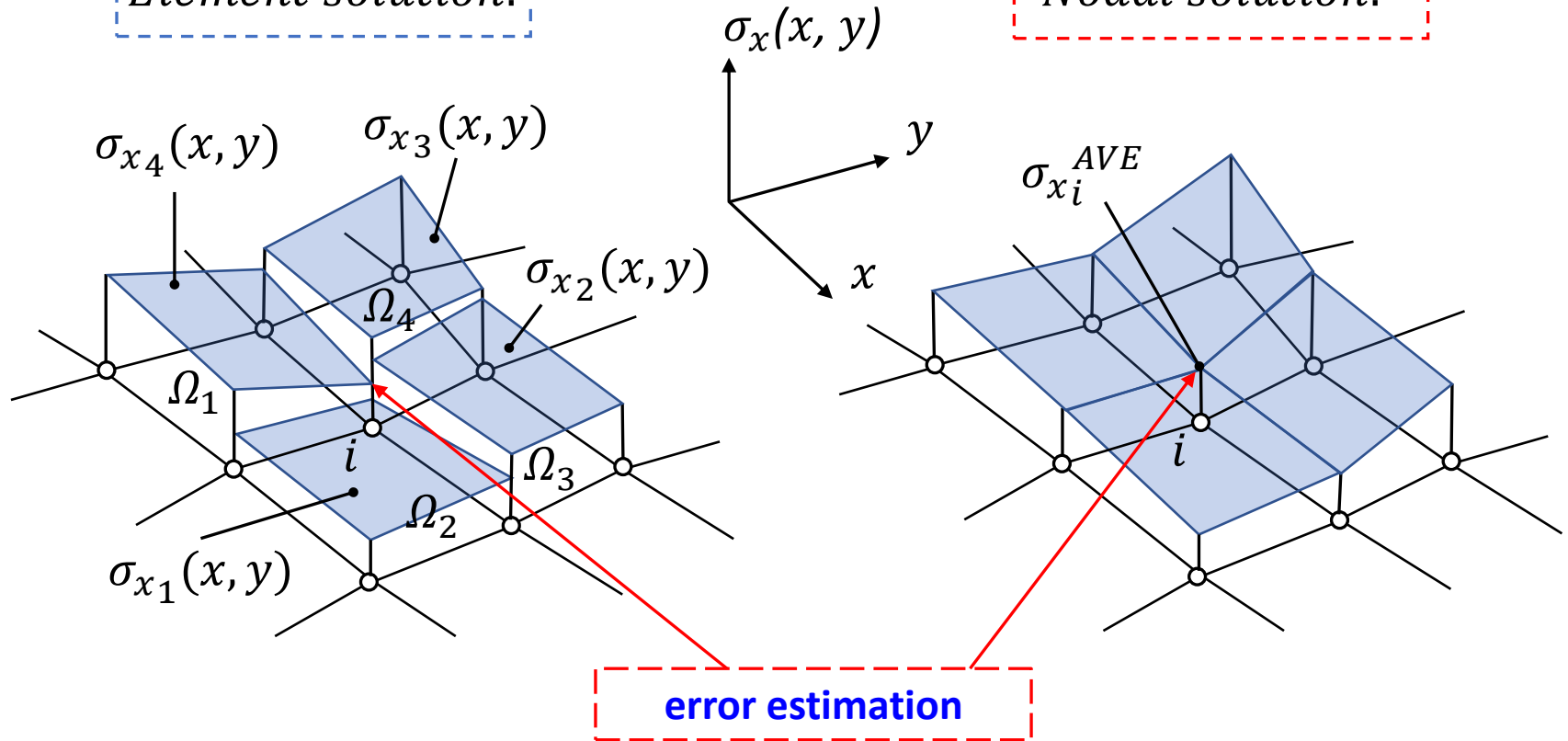


Przykład. Składowe naprężenia $\sigma_x(x, y)$ w zadaniu 2D.

Model MES złożony z 4-ęzłowych elementów czworokątnych

Element solution:

Nodal solution:



For $k = 4$:

$$\sigma_{x_i}^{AVE} = \frac{\sigma_{x_1}(x_i, y_i) + \sigma_{x_2}(x_i, y_i) + \sigma_{x_3}(x_i, y_i) + \sigma_{x_4}(x_i, y_i)}{4}$$

Błąd numeryczny

$$[K]\{q\} = \{F\},$$

Odchyłki parametrów węzłowych

Odchyłki sił

$$[K + \delta K]\{q + \delta q\} = \{F + \delta F\}.$$

Błąd względny wektora globalnego parametrów węzłowych:

$$\frac{\|\delta q\|}{\|q\|} \leq \underbrace{\|[K]\| \|[K]^{-1}\|}_{\text{cond}([K])} \left(\frac{\|\{\delta F\}\|}{\|\{F\}\|} + \frac{\|[\delta K]\|}{\|[K]\|} \right),$$

Wskaźnik uwarunkowania macierzy

$$\text{cond}([K]) = \frac{\text{Zmiana rozwiązania}}{\text{Zmiana danych wejściowych}}$$

$$\text{cond}([K]) \approx 1$$

Problem dobrze uwarunkowany,

$$\text{cond}([K]) \gg 1$$

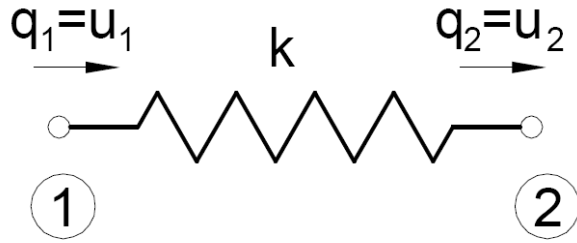
Problem źle uwarunkowany.

(duże różnice pomiędzy sztywnością elementów, niestabilne warunki brzegowe)

Norma macierzy (wektora) – miara wielkości

	Norma wektora	Norma macierzy
Norma Euklidesa \mathbf{L}_2	$\ \{q\}\ = \left(\sum_i (q_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$	$\ [K]\ = \left(\sum_j \sum_i (k_{ij})^2 \right)^{\frac{1}{2}}$
Norma max \mathbf{L}_∞	$\ \{q\}\ = \max_i q_i $	$\ [K]\ = \max_i \left(\sum_j k_{ij} \right)$

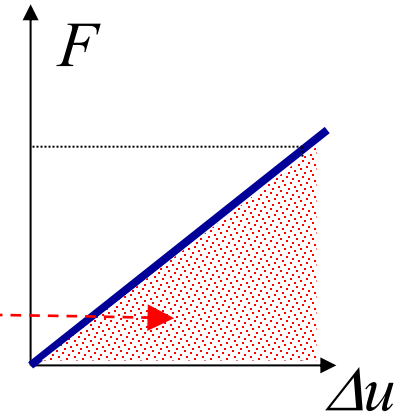
Element typu sprężyna



wektor parametrów węzłowych:

$$\{q\}_e = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}_e$$

2×1



energia sprężysta elementu:

$$F = k \cdot \Delta u = k \cdot (u_2 - u_1)$$

$$U_e = \frac{1}{2} F \Delta u = \frac{1}{2} k (\Delta u)^2 = \frac{1}{2} k (u_2 - u_1)(u_2 - u_1).$$

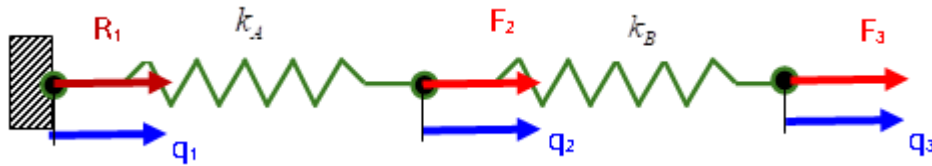
$$U_e = \frac{1}{2} [u_1, u_2] \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

macierz sztywności elementu:

$$[k]_e = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}$$

$$U_e = \frac{1}{2} [q]_e [k]_e \{q\}_e$$

Przykład Dwie sprężyny



Macierz sztywności sprężyny:

$$[k]_e = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

$$[q] = [q_1, q_2, q_3]$$

$$[F] = [R_1, F_2, F_3]$$

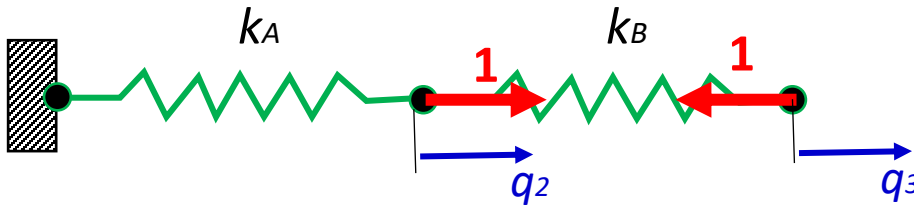
$$[K]_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} k_A & -k_A & 0 \\ -k_A & k_A + k_B & -k_B \\ 0 & -k_B & k_B \end{bmatrix} + \text{Boundary Conditions } (q_1 = 0) \rightarrow \begin{bmatrix} k_A + k_B & -k_B \\ -k_B & k_B \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

$$[K]^{-1} = \frac{1}{\det[K]} \cdot [K^D]^T = \frac{\begin{bmatrix} k_B & k_B \\ k_B & k_A + k_B \end{bmatrix}^T}{(k_A + k_B)k_B - (-k_B) \cdot (-k_B)} = \frac{1}{k_A \cdot k_B} \begin{bmatrix} k_B & k_B \\ k_B & k_A + k_B \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie:

$$\begin{Bmatrix} q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{k_A} & \frac{1}{k_A} \\ \frac{1}{k_A} & \frac{1}{k_A} + \frac{1}{k_B} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

Założmy: $F_2 = 1 \text{ N}$, $F_3 = -1 \text{ N}$ (Siły są w równowadze)



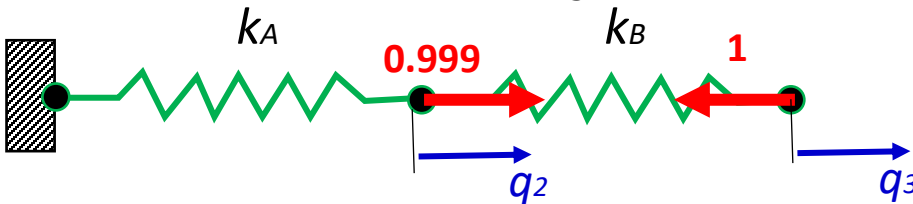
$$\begin{Bmatrix} q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{k_A} & \frac{1}{k_A} \\ \frac{1}{k_A} & \frac{1}{k_A} + \frac{1}{k_B} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

$$\rightarrow q_2 = \frac{F_2}{k_A} + \frac{F_3}{k_A} \quad (1),$$

$$q_3 = \frac{F_2}{k_A} + F_3 \left(\frac{1}{k_A} + \frac{1}{k_B} \right) \quad (2)$$

Przyjmijmy odchyłki siły:

$$\begin{cases} \delta F_2 = -0.001 \text{ N} \\ \delta F_3 = 0 \text{ N} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} F_2 + \delta F_2 = 0.999 \text{ N} \\ F_3 + \delta F_3 = -1 \text{ N} \end{cases}$$



Mamy: $q_2 + \delta q_2 = \frac{F_2 + \delta F_2}{k_A} + \frac{F_3 + \delta F_3}{k_A} \quad (3),$

$q_3 + \delta q_3 = \frac{F_2 + \delta F_2}{k_A} + (F_3 + \delta F_3) \left(\frac{1}{k_A} + \frac{1}{k_B} \right) \quad (4)$

$$\delta q_2 = (q_2 + \delta q_2) - q_2 \quad (5),$$

$$\delta q_3 = (q_3 + \delta q_3) - q_3 \quad (6)$$

Przyjmijmy normy Euklidesa:

$$\|\{q\}\|_2 = \sqrt{q_2^2 + q_3^2}, \quad \|\{\delta q\}\|_2 = \sqrt{\delta q_2^2 + \delta q_3^2}$$

$$\|\{F\}\|_2 = \sqrt{F_2^2 + F_3^2}, \quad \|\{\delta F\}\|_2 = \sqrt{\delta F_2^2 + \delta F_3^2}$$

$$\frac{\|\{\delta q\}\|_2}{\|\{q\}\|_2} = \frac{\sqrt{\delta q_2^2 + \delta q_3^2}}{\sqrt{q_2^2 + q_3^2}} \quad (7),$$

$$\|[K]\|_2 = \sqrt{\sum_j \sum_i (k_{ij})^2} \quad (8),$$

$$\text{cond}([K]) = \|[K]\|_2 \cdot \|[K]^{-1}\|_2 \quad (9) \quad 20$$

Przykład wyliczenia współczynnika uwarunkowania macierzy w zadaniu ze sprężynkami:

dla: $k_A = k_B = 1000 \text{ N/mm}$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_A + k_B & -k_B \\ -k_B & k_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2000 & -1000 \\ -1000 & 1000 \end{bmatrix} = 1000 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K]^{-1} = \begin{bmatrix} 1/k_A & 1/k_A \\ 1/k_A & (1/k_A + 1/k_B) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/1000 & 1/1000 \\ 1/1000 & 2/1000 \end{bmatrix} = 1/1000 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{cond}([K]) = \|[K]\|_2 \cdot \|[K]^{-1}\|_2 = 1000 \cdot \sqrt{(2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2)} \cdot 1/1000 \cdot \sqrt{(2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2)} = 7$$

dla: $k_A = 1$ i $k_B = 1000 \text{ N/mm}$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_A + k_B & -k_B \\ -k_B & k_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1001 & -1000 \\ -1000 & 1000 \end{bmatrix} = 1000 \begin{bmatrix} 1.001 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K]^{-1} = \begin{bmatrix} 1/k_A & 1/k_A \\ 1/k_A & (1/k_A + 1/k_B) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.001 \end{bmatrix}$$

$$\text{cond}([K]) = \|[K]\|_2 \cdot \|[K]^{-1}\|_2 = 1000 \cdot \sqrt{(1.001^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2)} \cdot \sqrt{(1^2 + 1^2 + 1^2 + 1.001^2)} = 4002$$

$$q_2 = \frac{F_2}{k_A} + \frac{F_3}{k_A} \quad (1),$$

$$q_3 = \frac{F_2}{k_A} + F_3 \left(\frac{1}{k_A} + \frac{1}{k_B} \right) \quad (2)$$

$$q_2 + \delta q_2 = \frac{F_2 + \delta F_2}{k_A} + \frac{F_3 + \delta F_3}{k_A} \quad (3),$$

$$q_3 + \delta q_3 = \frac{F_2 + \delta F_2}{k_A} + (F_3 + \delta F_3) \left(\frac{1}{k_A} + \frac{1}{k_B} \right) \quad (4)$$

$$\delta q_2 = (q_2 + \delta q_2) - q_2 \quad (5),$$

$$\delta q_3 = (q_3 + \delta q_3) - q_3 \quad (6)$$

$$\frac{\|\{\delta q\}\|_2}{\|\{q\}\|_2} = \frac{\sqrt{\delta q_2^2 + \delta q_3^2}}{\sqrt{q_2^2 + q_3^2}} \quad (7),$$

$$\|[K]\|_2 = \sqrt{\sum_j \sum_i (k_{ij})^2} \quad (8),$$

$$\text{cond}([K]) = \|[K]\|_2 \cdot \|[K]^{-1}\|_2 \quad (9),$$

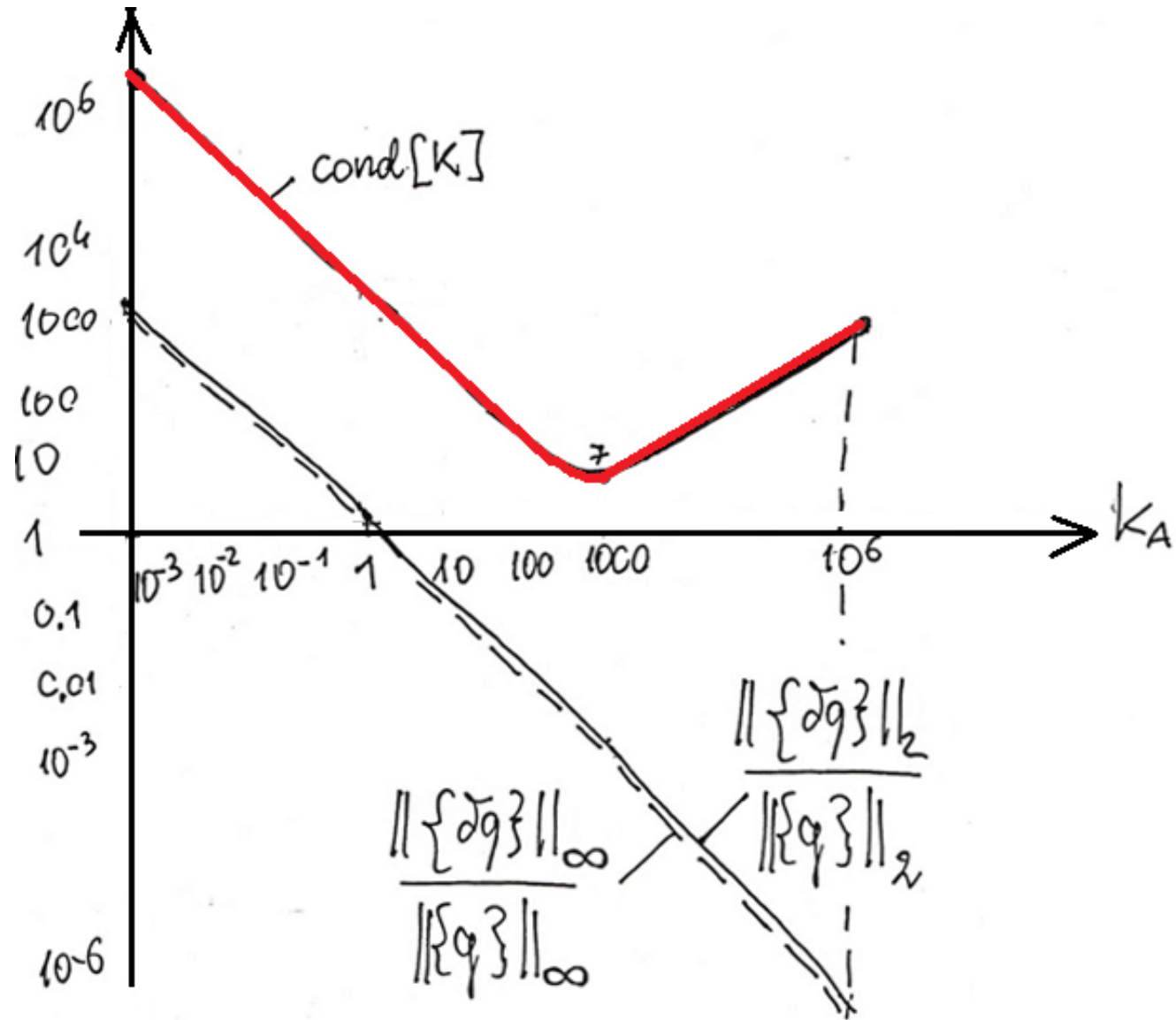
$$\text{cond}([K]) \frac{\|\{\delta F\}\|_2}{\|\{F\}\|_2} = \text{cond}([K]) \frac{\sqrt{\delta F_2^2 + \delta F_3^2}}{\sqrt{F_2^2 + F_3^2}} \quad (10)$$

(Błąd względny wektora globalnego parametrów węzłowych)

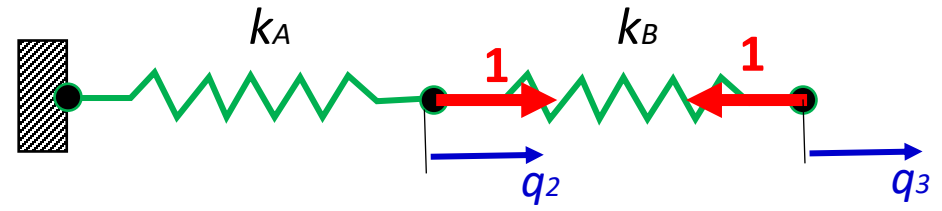
Założmy: k_A – zmienne

$k_B = 1000 \text{ N/mm}$ - stałe

k_A N/mm	q_2 mm	q_3 mm	$q_2 + \delta q_2$ mm	$q_3 + \delta q_3$ Mm	δq_2 mm	δq_3 mm	$\frac{\ \{\delta q\}\ _2}{\ \{q\}\ _2}$	$\text{cond}([K])$	$\text{cond}([K]) \frac{\ \{\delta F\}\ _2}{\ \{F\}\ _2}$
Wzór →	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(9)	(10)
0.001	0	-0.001	-1	-1.001	-1	-1	1414.21	$4 \cdot 10^6$	2828.43
1	0	-0.001	-0.001	-0.002	-0.001	-0.001	1.41	4002	2.83
1000	0	-0.001	-10^{-6}	$-1.001 \cdot 10^{-3}$	-10^{-6}	-10^{-6}	$1.41 \cdot 10^{-3}$	7	0.00495
10^6	0	-0.001	-10^{-9}	$-1.000 \cdot 10^{-3}$	-10^{-9}	-10^{-9}	$1.41 \cdot 10^{-6}$	1000	0.7



$$\begin{bmatrix} k_A + k_B & -k_B \\ -k_B & k_B \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

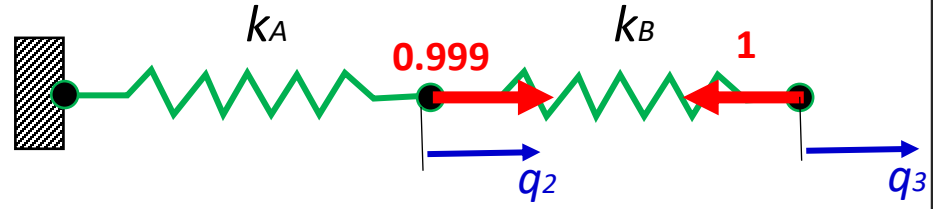


$$\begin{cases} (k_A + k_B) q_2 - k_B q_3 = F_2 \\ -k_B q_2 + k_B q_3 = F_3 \end{cases}$$



$$\begin{cases} q_3 = \frac{k_A + k_B}{k_B} q_2 - \frac{F_2}{k_B} & (a) \\ q_3 = q_2 + \frac{F_3}{k_B} & (b) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} k_A + k_B & -k_B \\ -k_B & k_B \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_2 + \delta F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$



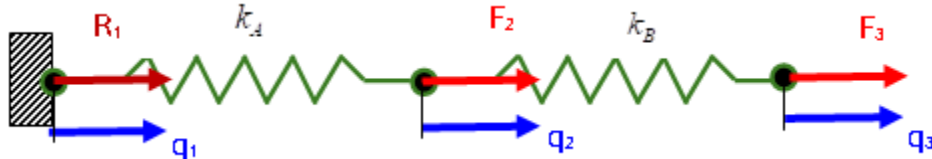
$$\begin{cases} (k_A + k_B) q_2 - k_B q_3 = F_2 + \delta F_2 \\ -k_B q_2 + k_B q_3 = F_3 \end{cases}$$



$$\begin{cases} q_3 = \frac{k_A + k_B}{k_B} q_2 - \frac{F_2}{k_B} - \frac{\delta F_2}{k_B} & (a') \\ q_3 = q_2 + \frac{F_3}{k_B} & (b) \end{cases}$$

Podsumowanie przykładu Dwie sprężyny

Układ równań:



$$\begin{bmatrix} k_A + k_B & -k_B \\ -k_B & k_B \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

Pierwsze równanie: $q_3 = \frac{k_A + k_B}{k_B} \cdot q_2 - \frac{F_2}{k_B}$

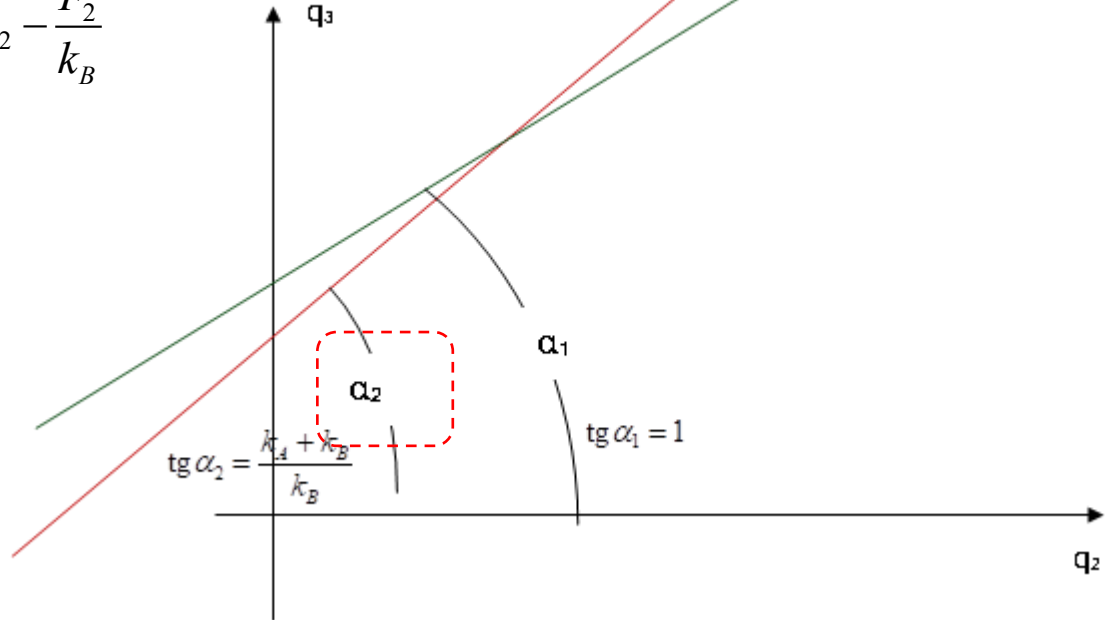
Drugie równanie: $q_3 = q_2 + \frac{F_3}{k_B}$

Układ źle uwarunkowany, jeśli:

$$\frac{k_A + k_B}{k_B} \rightarrow 1 \quad \frac{k_A}{k_B} \rightarrow 0$$

Wrażliwość na zmianę nachylenia

$k_A \ll k_B$ - system ill conditioned



Błąd zaokrąglenia

Jeżeli obliczenia prowadzone są z dokładnością do p cyfr znaczących, to liczbę cyfr znaczących w rozwiązaniu można szacować jako:

$$r \geq p - \log_{10}(\text{cond}([K]))$$

➔ Duży współczynnik uwarunkowania $\text{cond}([K])$ prowadzić może do utraty wymaganej dokładności rozwiązania (różnice w sztywności lub mało stabilne warunki podparcia).

p – liczba cyfr znaczących w komputerowej reprezentacji liczb
r – liczba cyfr znaczących wyniku

W praktycznych zadaniach MES $\text{cond}([K])$ osiąga 10^8